

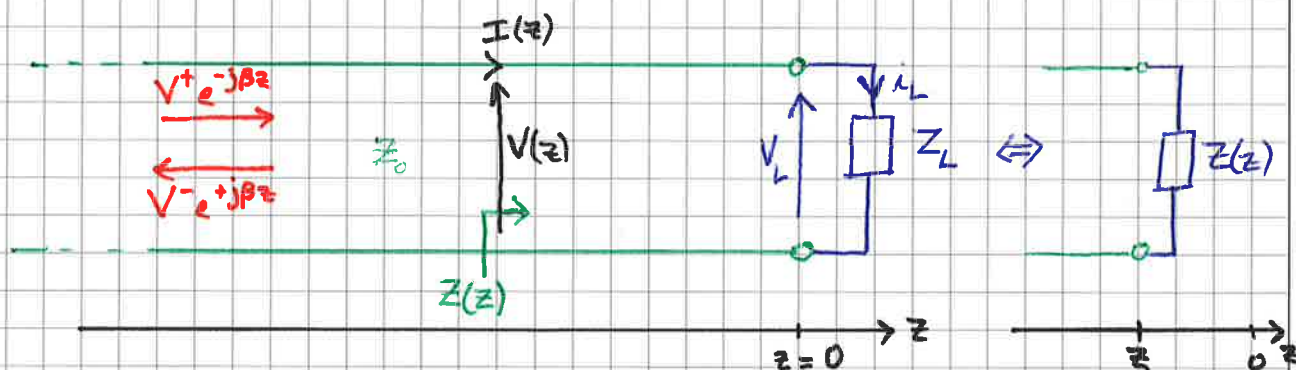


ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

b) Lignes terminées par un court-circuit ou un circuit ouvert

(i) Remarques préliminaires

C34 - L'impédance de ligne



Rappel :

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z} \\ I(z) = \frac{1}{Z_0} [V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{+j\beta z}] \end{cases}$$

Impédance de ligne $Z(z)$ = impédance équivalente, vue à la position z , de la portion de ligne à droite terminée par la charge Z_L .

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{+j\beta z}} \in \mathbb{C}$$

* Rq1: Ligne infinie $\Rightarrow V^- = 0 \Rightarrow Z(z) = Z_0$

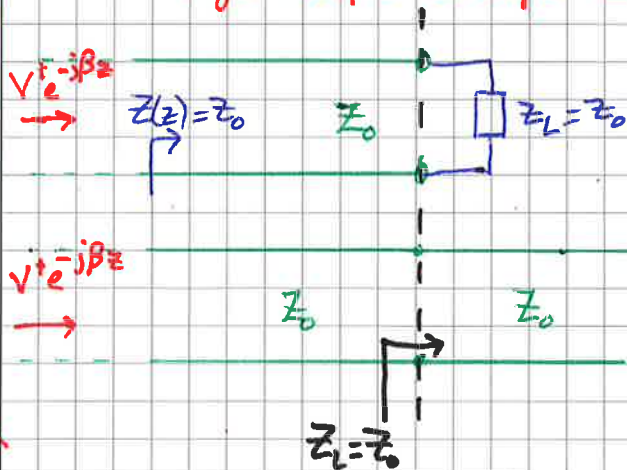
* Rq2: $Z(z) = R(z) + jX(z)$ et $Z(0) = Z_L$
resistance reactance condition à la limite fixant $\frac{V^-}{V^+}$

* Rq3: Une source placée en z voit $Z(z)$: elle impose V_s et la ligne lui impose $I_s = \frac{V_s}{Z(z)} \Rightarrow Z(z)$ est une notion très importante !



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C35 - Charge adaptée en impédance



Si $Z_L = Z_0$ la condition à la limite $Z(z=0) = Z_0$ donne

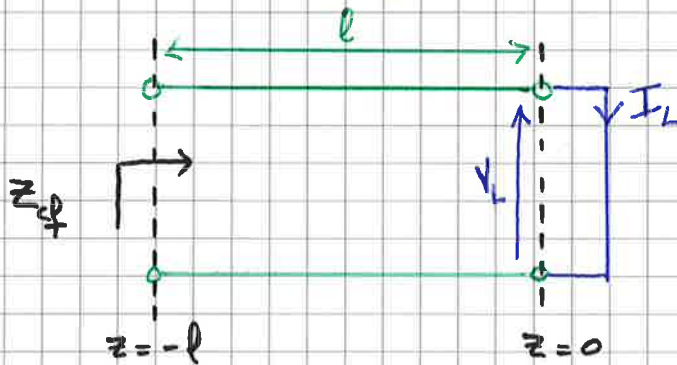
$V^- = 0$ et

$$\frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \quad \forall z!$$

→ la ligne apparaît infinie!

(ii) Ligne court-circuitée ($Z_L = 0$)

C36 -



* Condition à la limite : $Z(z=0) = Z_L = 0$

$$\Rightarrow Z_0 \frac{V^+ + V^-}{V^+ - V^-} = 0 \Rightarrow V^+ = -V^- \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{V^-}{V^+} = -1}$$

* Tensions et courants de ligne (phaseurs)

$$\begin{cases} V(z) = V^+ (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -2V^+ j \sin(\beta z) \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = \frac{2V^+}{Z_0} \cos(\beta z) \end{cases}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

* Tension réelle dans la ligne :

Supposons $V^+ = |V^+| e^{j\phi^+}$ (V^+ est déterminé par la condition à la limite côté source)

$$V(z,t) = \operatorname{Re} \{ V(z) e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ V^+ (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) e^{j\omega t} \}$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ 2 |V^+| e^{j(\omega t + \phi^+)} e^{-j\frac{\pi}{2}} \sin \beta z \right\}$$

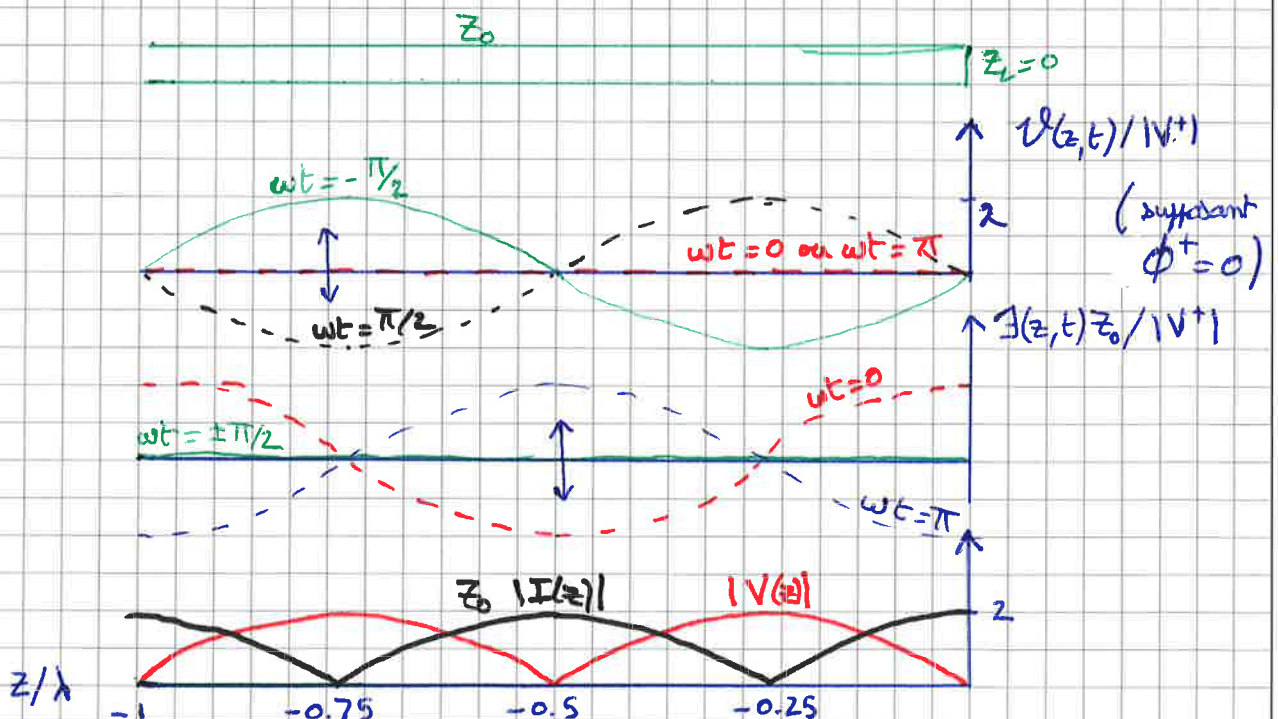
$$V(z,t) = 2 |V^+| \sin(\beta z) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \phi^+\right)$$

* Courant réel dans la ligne :

$$I(z,t) = \operatorname{Re} \{ I(z) e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2V^+}{Z_0} \cos(\beta z) e^{j\omega t} \right\}$$

$$\Rightarrow I(z,t) = \frac{2|V^+|}{Z_0} \cos(\beta z) \cos(\omega t + \phi^+)$$

Les maxima de V et I "stationnent" à la même position z dans le temps $\Rightarrow$ ondes stationnaires



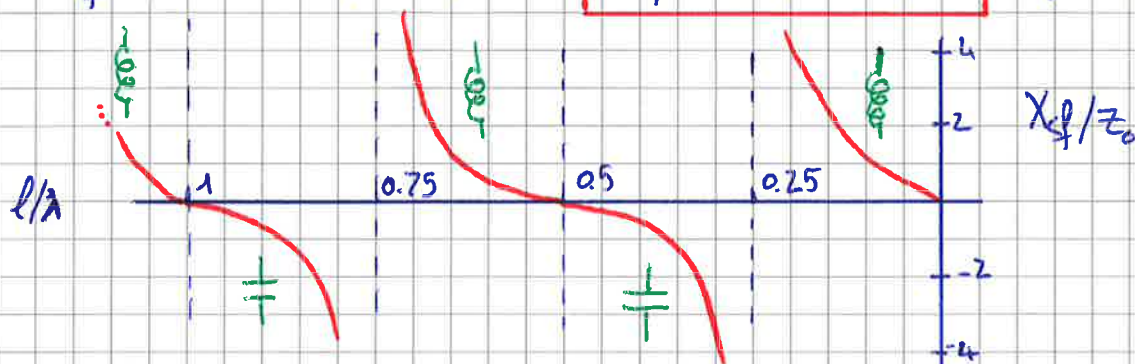


ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

* Impédance de ligne et d'entrée:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{-Z_0 \sin \beta z}{Z_0 \cos \beta z} Z_0 = -j Z_0 \tan \beta z$$

$$Z_{cl} = Z(-l) \Rightarrow Z_{cl} = j Z_0 \tan \beta l = j X_{cl}$$



(C37) Inductance d'un câble TV court.

$$* Z_{cl} = j Z_0 \tan(\beta l) \text{ avec } Z_0 = 300 \Omega \quad \beta l = \frac{\omega}{v_p} l = \frac{2\pi f}{v_p} l$$

$$\text{avec } f = 300 \cdot 10^6 \text{ Hz}, l = 0.1 \text{ m}, v_p = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot \beta l = 2\pi \left(\frac{f}{v_p} l \right) \rightarrow 0.1$$

$$\Rightarrow Z_{cl} = j 300 \tan\left(\frac{2\pi}{10}\right) = j 218 \Omega \text{ inductif.}$$

$$L_{\text{eff}} = \frac{X_{cl}}{\omega} = \frac{218}{2\pi \cdot 300 \cdot 10^6} = 0.116 \mu\text{H}$$

(iii) Ligne circuit-ouvert

$$Z(0) = +\infty \Rightarrow \frac{V^-}{V^+} = +1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(z) = V^+ (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = 2V^+ \cos \beta z \\ I(z) = \frac{V^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -\frac{2V^+}{Z_0} j \sin \beta z = \frac{2V^+}{Z_0} e^{-j\frac{\pi}{2}} \sin \beta z \end{cases}$$

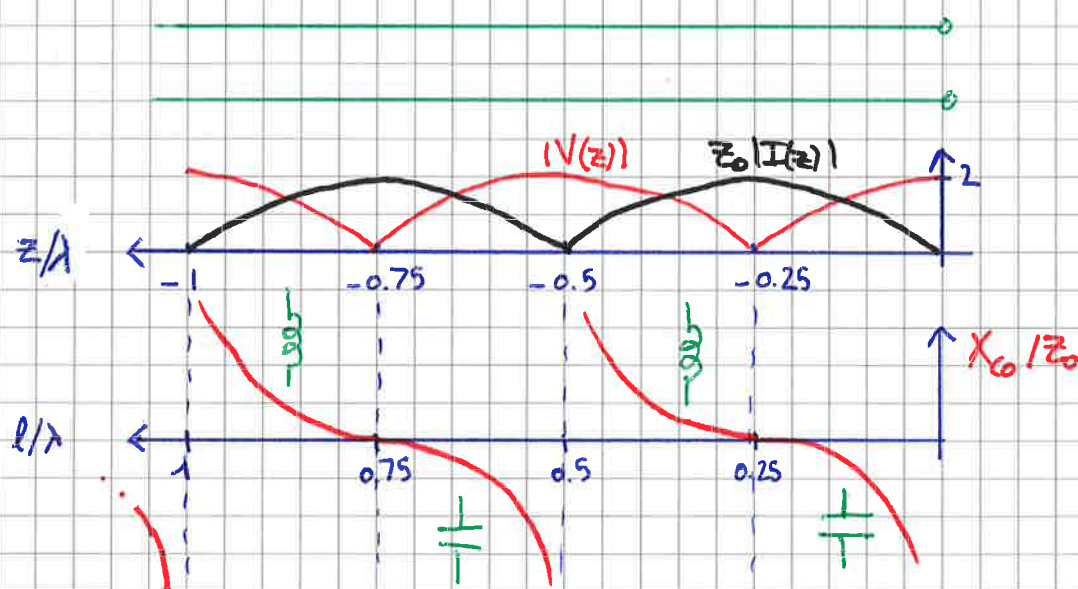


ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$\Rightarrow \begin{cases} V(z,t) = 2|V^+| \cos(\omega t + \phi^+) \cos(\beta z) \\ I(z,t) = \frac{2|V^+|}{Z_0} \sin \beta z \cos(\omega t + \phi^+ - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$Z(z) = \frac{\cos \beta z}{-j \sin \beta z} Z_0 = j Z_0 \cot(\beta z)$$

$$\Rightarrow Z_{co} = Z(-l) = -j Z_0 \cot(\beta l) = j X_{co}$$



C39 Capacitance d'un câble TV court

$$Z_{co} = -j Z_0 \cot(\beta l). \text{ Mais } \lambda = \frac{c}{f} = 1 \text{ m} \Rightarrow \frac{l}{\lambda} = 0.2$$

$$\Rightarrow \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = 2\pi \frac{l}{\lambda} = 2\pi \cdot 0.2 \Rightarrow Z_{co} = -j 300 \cot(2\pi \cdot 0.2)$$

$$\Rightarrow Z_{co} = -j 97.5 \Omega \text{ capacitif}$$

$$\frac{1}{C_{eff} \omega} = 97.5 \Rightarrow C_{eff} = \frac{1}{97.5 \cdot 2\pi \cdot 300 \cdot 10^6} = 5.44 \text{ pF}$$